

Výroková logika

Pojem, soud, úsudek, jazyk.

Základním stavebním kamenem logického myšlení a logiky jako vědy o aspektech myšlení je *pojem*. Z pojmů sestavujeme *soudy* a ze soudů *úsudky*. Prostředkem k vyjadřování úsudků, k jejich řetězení a k objektivizaci myšlenkové činnosti, vedoucí k možnosti komunikace, je *jazyk*.

Trojúhelníkové schéma označení.

Na otázku „Co je Praha a z čeho se skládá?“ lze odpovídat:

- a) „Praha“ se skládá z milionu obyvatel, tisíců domů apod.
- b) „Praha“ je pojem, který se skládá z množství vyabstrahovaných znaků činících Prahu Prahou,
- c) „Praha“ je podstatné jméno rodu ženského, které se skládá ze tří souhlásek a dvou samohlásek, kterými označujeme pojem „Praha“.

Chceme-li přesnou odpověď, musíme přesně formulovat otázku. V našem případě to znamená zpřesnit, o kterou Prahu se jedná, do které množiny prvek „Praha“ řadíme:

- do množiny reálných materiálních objektů (a),

- do množiny pojmů (b),
- do množiny slov zařazených ve slovníku (c).

Z pojmů sestavujeme na základě myšlenkové činnosti *soudy* (výroky): Takovým soudem je na příklad tvrzení

„Praha je město.“.

Ze soudů je možné sestavovat *úsudky* rozšiřující naše znalosti:

„Všechna města mající více než milion obyvatel jsou velkoměsta.

Při sčítání obyvatel bylo zjištěno, že Praha má více než milion obyvatel.

Praha je velkoměsto.“

Souhrn (třídu, množinu) prvků, který charakterizujeme nějakou vlastností [viz naše množiny a), b), c)] nazýváme *oborem úvahy*.

Jednotlivé předměty tvořící součásti tohoto oboru jsou *prvky oboru úvahy*, které označujeme *jmény* (názyvy).

Veškeré prostředky sloužící k vyjadřování a sdělování myšlenek (soudů, úsudků) tvoří *jazyk*.

Jazykem rozumíme jakoukoli soustavu znaků, jejichž sled je sestaven podle stanovených pravidel. Taková soustava umožňuje předávání, uchování a zpracování informací v čase a prostoru.

Každý jazyk, včetně jeho jednotlivých znaků a pravidel, má svoji stránku hmotnou a významovou.

Hmotná stránka jazyka je dána způsobem materializace. Mohou to být zvuky (hudba, zvuková signalizace), světla (světelná signalizace), grafické znaky (různá písma, kresby), ale také stopa na magnetickém médiu, díra v dřevěné pásce, jízdenka apod.

Významová stránka jazyka spočívá v tom, že znakům je přiřkládán určitý význam. Z tohoto hlediska plní jazyk funkci

- informativní,
- uměleckou,

– emocionální.

Způsobem vzniku dělíme jazyky na

- a) *přirozené (národní)* – čeština, slovenština, němčina apod. Za přirozené pokládáme i určitá gesta a pohyby mající ustálený význam (přikyvování, hrozba).
- b) *umělé* – vzniklé dohodou (konvencí). Sem patří různé kódy, smluvené signály, programovací jazyky, symbolický jazyk matematiky, logiky, chemie apod. Tyto jazyky jsou vytvářeny cílevědomě k přesnému formulování určitých myšlenek.
- c) *smíšené* – jde o společné užití jazyků přirozených a umělých při tvorbě učebnic, vědeckých textů, odborných příruček apod.

K přesnému vymezení jakéhokoliv jazyka je třeba stanovit

- a) slovník příslušného jazyka (množina přípustných slov),
- b) pravidla umožňující vytváření složitějších výrazů (syntaktická pravidla),
- c) význam užívaných výrazů (sémantická pravidla).

Proto rozlišujeme

- | | |
|--------------------|--|
| <i>syntax,</i> | tj. formální výstavbu složených výrazů bez ohledu na obsah. Jde tedy o vzájemné formální <i>vztahy mezi jednotlivými výrazy,</i> |
| <i>sémantiku,</i> | tj. obsahovou stránku výrazů. Jsou to <i>vztahy mezi předměty (objekty) a výrazy (znaky),</i> |
| <i>pragmatiku,</i> | tj. <i>vztahy mezi jazykovými výrazy a jejich uživateli.</i> (Uživatel na nějaký výraz může, ale nemusí reagovat, může, ale nemusí výrazům rozumět atd.) |

Všechny tyto tři aspekty (syntax, sémantika, pragmatika) tvoří teorii vyjadřovacích soustav zvanou *semiotika*.

Následující kapitoly jsou věnovány syntaktickému aspektu jazyka. Jejich uspořádání (výroková logika, predikátová logika, logika tříd a

logika relací) odpovídá záměru vybavit studenta základním formalizovaným aparátem, použitelným nejen pro pregnantní výklad uvedených kalkulů, ale i témat dalších, která budou obsahem jiných, samostatných textů a skript. Jsou to např. problémy, které jsou předmětem studia metodologie, odvozování, induktivní nebo deduktivní metody, axiomatizace různých systémů, neklasické logiky (erotetická, normativní, vícehodnotová, modální, striktní implikace, intuicionistická).

V učebním textu, který si klade za cíl základní uvedení do problematiky formální, symbolické logiky je nutné připomenout, že na počátku 50. let byla v řadě zemí právě tato logika nazývána logistikou, která „... překrucuje a falšuje theoretické základy, metody a závěry matematické logiky v duchu idealismu a metafysiky. ... Logistika hlásá krajní formalismus. Je to bezobsažná, bezpředmětná logika, odtržená od skutečnosti, od zkušeností, od praxe a od objektivní pravdy.“ Světově proslulému logikovi Rudolfu Carnapovi je pak vytýkáno, že „... nebere v úvahu ani význam symbolů, ani smysl výrazů, ale jediné a výlučně druhy a pořádek symbolů, které tvoří výrazy.“ (Viz Stručný filosofický slovník, Praha SNPL 1955, s. 267, heslo „logistika“.) Toto pojetí způsobilo nedůvěru vůči logice vůbec a je též na učitelích, aby vrátili logiku do povědomí vzdělanců.

Výroková logika

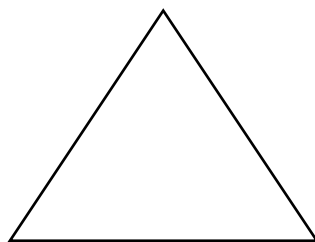
Základem moderní logiky je logika výroková (též teorie výroků, výrokový kalkul). Krom jiného tvoří nástroj pro další vědecké disciplíny, které moderní logiku využívají.

Výroková logika je nutným předpokladem pro výklad i pochopení všech dalších partií klasické i neklasické logiky a její důkladná znalost další studium velmi usnadňuje.

Výrok

Výrok je základním pojmem výrokové logiky. Za výrok pokládáme každý jednoduchý výraz (sdělení, tvrzení, informaci), u něhož můžeme položit otázku „je pravda, že ...?“ Není rozhodující, zda je otázka zodpověditelná okamžitě, či nikoliv. Existují totiž otázky, které nejsou momentálně zodpověditelné.

PRAHA (objekt, denotát) reálný
předmět tvořený ulicemi,
náměstími, parky, lidmi atd.



PRAHA (pojem, abstrakce,
produkt myšlení ve vědomí)

PRAHA (slovo, znak,
materializace pojmu)

Příklad.

/1/ „Dnes je pondělí.“

- /2/ „Zítra je úterý.“
- /3/ „Číslo 7 je prvočíslo.“
- /4/ „V této místnosti je 20 studentů.“
- /5/ „28. září 2010 bude pršet.“
- /6/ „V tomto rybníce je 429 ryb.“
- /7/ „Číslo 8 je sudé číslo.“
- /8/ „Každé sudé číslo je dělitelné 2.“
- /9/ „ $8 = 10$.“

q

Všechny uvedené příklady jsou výroky odpovídající našemu požadavku. Jednotlivé výroky mají rozličnou kvalitu, zajímáme-li se o jejich pravdivost. Výroky /3/, /7/, /8/ jsou pravdivé vždy. Výroky /1/, /2/, /4/ jsou někdy pravdivé, jindy ne. Výrok /5/ bude možno zhodnotit až 28. září 2010. Výrok /6/ můžeme pokládat za nezjistitelný. Konečně výrok /9/ je jednoznačně nepravdivý. Z uvedených příkladů je patrné, že výrok může být pravdivý, nepravdivý, možný (pravděpodobný), nezjistitelný.

V dalším výkladu se budeme zabývat tou částí logiky, která připouští pouze dvě pravdivostní hodnoty: pravdu a nepravdu.

Pravdivostní hodnota výroku

Ptáme-li se po pravdivosti nějakého výroku, může následovat odpověď buď *ano* nebo *ne*. Mluvíme tedy o *logice dvouhodnotové*. Výrok má hodnotu „pravda“ či „nepravda“. Pro hodnotu „pravda“ budeme používat znaku „1“, pro hodnotu „nepravda“ znaku „0“.

(Tohoto způsobu značení užíváme v souladu se symbolikou užívanou v informatice nebo kybernetice).

Každý výrok musí mít jednu z těchto hodnot a nemůže mít žádnou jinou.

Výroky jednoduché a složené

Každý samostatný celek, který je výrokem, je výrokem jednoduchým.

Jednoduché výroky je možno sestavovat do *výroků složených*.

Pak z výroků /1/ a /2/ je možno sestavit složený výrok

/10/ „Dnes je pondělí *a* zítra je úterý.“

nebo

/11/ „*Jestliže* je dnes pondělí, *pak* zítra je úterý.“,

/12/ „*Jestliže* je každé sudé číslo dělitelné 2 *a* číslo 8 je sudé číslo, *pak* číslo 8 je dělitelné dvěma.“,

/13/ „*Není pravda*, že $8 = 10$.“.

Složený výrok vytváříme tak, že jednoduché výroky spojujeme logickými spojkami. Logické spojky nazýváme též operátory nebo funktoři.

Logické spojky (funktoři, operátory)

Jsou to takové výrazy, které nám umožňují spolu s výroky vytvářet výroky stále složitější. Takovými logickými spojkami v národním jazyce jsou např.

„není pravda, že ...“,

„... a ...“,

„... nebo ...“,

„jestliže ..., pak ...“,

„... tehdy a jen tehdy, když ...“, atd.

Tento výčet není úplný, o dalších logických spojkách bude hovořeno v následující části.

Jestliže každý jednoduchý výrok může být pravdivý anebo nepravdivý, pak je samozřejmé, že pokud z několika jednoduchých

výroků sestavíme výrok složený, nějakou pravdivostní hodnotu musí mít i on.

Výroková logika se zabývá právě tím, jaké výsledné pravdivostní hodnoty má složený výrok v závislosti na pravdivostních hodnotách výroků jednodušších a na charakteru logických spojek.

Každá logická spojka má přesně stanovený význam. Řekli jsme, že výrok může být pravdivý nebo nepravdivý. Je-li výrok „dnes je pondělí“ pravdivý, je výrok „není pravda, že je dnes pondělí“ nepravdivý. Jak je tomu ale u výroků složených?

/14/ „Dnes je pondělí a zítra je úterý.“

Je-li výrok /1/ pravdivý a výrok /2/ pravdivý, je pravdivostní hodnota složeného výroku také „pravda“ („1“).

Abychom mohli tyto úlohy jednodušeji řešit, zavádíme do moderní logiky po vzoru matematiky konstanty a proměnné.

Výrokové konstanty a výrokové proměnné

Výrokové konstanty (jména) označují určité výroky (o objektech, událostech, jevech).

Výroková proměnná je symbol (znak, smluvená značka), kterým nahradíme konkrétní výrok. Za proměnnou můžeme kdykoliv dosadit konstantu z příslušného oboru proměnnosti.

Chceme-li tedy řešit obecné závislosti mezi jednoduchými výroky, majícími hodnotu buď „pravda“ – 1 nebo „nepravda“ – 0, usnadníme si úkol náhradou konstant buď proměnnými (budeme užívat písmen $p, q, r, s \dots$) nebo značkami nahrazujícími konstanty (např. písmena $A, B, C, D \dots$).

Namísto

/15/ „Jestliže je dnes pondělí, pak zítra je úterý.“

nebo

/16/ „Jestliže je číslo 8 sudé číslo a každé sudé číslo je dělitelné 2, pak číslo 8 je dělitelné 2.“,

zapišeme

/17/ „Jestliže p , pak q .“, resp. „Jestliže A , pak B .“ (zápis věty /15/)

nebo

/18/ „Jestliže p a q , pak r .“, resp. „Jestliže A a B , pak C .“ (zápis věty /16/).

Tím jsme výrok *formalizovali* do výrokové formy.

Výroková forma neboli formule

Výroková forma neboli formule je forma výroku, která může nabýt hodnot „pravda“ – 1, „nepravda“ – 0. Dosazením příslušné konstanty z příslušného oboru proměnnosti udělíme výrokové formě (formuli) hodnotu a učiníme z ní výrok.

Příklad. „ p a q “ je formulí (výrokovou formou).

Za proměnnou p dosadíme výrok „dnes je pondělí“, za proměnnou q dosadíme výrok „zítra je úterý“.

Z formule „ p a q “ jsme získali složený výrok „dnes je pondělí a zítra je úterý“.

Vzhledem k logické spojce „a“ je pravdivostní hodnota složeného výroku „pravda“, je-li $p = 1$ a $q = 1$. V ostatních případech je výrok nepravdivý.

q

Obor proměnnosti

Vystupuje-li v nějakém výroku proměnná, můžeme za ni dosadit konstantu (jméno), které v daných souvislostech dává smysl.

Dosazením takové konstanty vzniká pravdivý nebo nepravdivý výrok.

Příklad. /19/ „Spisovatel p napsal román q .“

Jde o výrokovou formu se dvěma proměnnými p , q . Nejedná se tedy o výrok.

/20/ „Spisovatel Škvorecký napsal román Zbabělci“.

Z výrokové formy /19/ se stal pravdivý výrok. Pokud bychom dosadili za p konstantu „Procházka“, dodrželi jsme zásadu, že konstanta (jméno) respektuje obor proměnnosti („spisovatelé“), avšak vytvořili jsme výrok

/21/ „Spisovatel Procházka napsal román Zbabělci.“,

který je nepravdivý. Oborem proměnnosti pro formuli /19/ pro proměnnou p je množina spisovatelů, pro proměnnou q množina románů. Dosazením konstant (Škvorecký, Procházka) za proměnné přiřazujeme prvek z množiny románů k prvku z množiny spisovatelů a vytváříme tak pravdivý (/20/), resp. nepravdivý (/21/) výrok.

q

V dalším textu budeme pro zkoumané složené výrazy užívat nejčastěji termín formule.

Formule

Výrazy, s nimiž budeme pracovat jsou tvořeny z proměnných p , q , r , s ... a z logických spojek (funktorů, operandů). Při sestavování formulí budeme respektovat pravidla:

- 1) Každá výroková proměnná (p , q , r ...) sama o sobě je formulí.
- 2) Jsou-li A , B , C ... formule, pak výraz složený z A , B , C ... logickými spojkami jsou formule.
- 3) Žádné jiné výrazy nejsou formulí.

Užívání závorek

Při konstrukci složených výroků (formulí) užíváme závorek obdobně jako v matematice.

Příklad. Užijme formule A, B, C . Pak

$\bar{A}$ je formule,

$A \wedge B$ je formule,

$\overline{(A \wedge B)} \vee C$ je formule,

$[(A \wedge B) \vee C] \wedge \bar{A}$ je formule, atd.

q

Z úsporných důvodů nemusíme užívat závorek tam, kde negační pruh zasahuje celou závorku. Místo $[(A \wedge B) \vee C] \wedge \bar{A}$ můžeme tedy zapsat $(\overline{A \wedge B \vee C}) \wedge \bar{A}$.

Negační pruh může tedy závorky nahradit. Proto také pokládáme negační pruh za výhodnější, než symboly $\neg$, resp. $\bar{}$.

V dalším studiu se nám vyskytnou zápisy např. $\overline{\bar{p} \vee q} \wedge \bar{r} \Leftrightarrow \overline{\bar{p} \vee q},$ což je rozhodně přehlednější než zápis $\neg\{[\neg(\neg p \vee q) \wedge \bar{r}] \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)\}$.

Nejužívanější logické spojky (operátory, funktory)

Znaky, které označují ve formulích výrazy (resp. výroky) spojujeme logickými spojkami, pro něž zavádíme symboly.

Logická spojka	Název	Symbol
„není pravda, že ...“	negace	$\neg$
„... a ...“	konjunkce	$\wedge$
„... nebo ...“	disjunkce	$\vee$
„jestliže ..., pak ...“	implikace	$\rightarrow$
„... tehdy a jen tehdy, když ...“	ekvivalence	$\equiv$

Tab. 1

p – je formule dle 1. pravidla,

$p \Leftrightarrow q$ – jestliže p , pak q ,

$(p \supset q) \in \mathcal{F}$	– (jestliže p , pak q) a r ,
$\overline{p \in (\bar{p} \supset q)}$	– není pravda, že p a (jestliže non p , pak q),

to vše jsou správně utvořené formule.

¹U negace je zvykem užívat místo „není pravda, že ...“ latinského „non“; čteme „není pravda, že p “ nebo „non p “.

Základní funktory výrokové logiky

Protože úkolem logiky je kromě jiného zabezpečení jednoznačného (pregnantního) vyjadřování, musí být přesně stanoven význam každého fuktoru.

Výrok (výraz, tvrzení), který vystupuje zastoupen proměnnou ve spojení s nějakým funktorem, můžeme nazývat argumentem.

Protože negace vytváří složený výrok (formuli) již ve spojení s jedním argumentem, je funktorem *jednoargumentovým*.

Funktory $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$ $\approx$ jsou *dvouargumentové*. (Příklad: p ve spojení s $\neg$ tvoří $\bar{p}$, což je správně utvořená formule, kdežto $p \in \star$, $p \supset \star$, atd. jsou nesprávné formule).

Negace

Má-li p pravdivostní hodnotu 1, pak $\bar{p}$ má pravdivostní hodnotu 0.

Má-li p pravdivostní hodnotu 0, pak $\bar{p}$ má pravdivostní hodnotu 1.

Tuto skutečnost vyjadřujeme definiční tabulkou.

	1	2
	p	$\bar{p}$
1	0	1
2	1	0

¹**Poznámka:** Na konci skript je uvedena tabulka dalších symbolů užívaných pro logické operátory.

Tab. 2

U dalších funktorů (dvouargumentových), které spojují vždy dva argumenty (dva výroky, dvě proměnné), jde o kombinaci hodnot 1 a 0. Základem tabulky jsou vždy argumenty p, q , které mají možné hodnoty 0, 1 (dvouhodnotová logika).

	1	2	3	4	5	6,00
	p	q	Konjunkce $\wedge$	Disjunkce $\vee$	Implikace $\rightarrow$	Ekvivalence $\equiv$
1	0	0	0	0	1	1
2	0	1	0	1	1	0
3	1	0	0	1	0	0
4	1	1	1	1	1	1

Tab. 3

Komentář k tab. 3. Argumenty p, q mohou být oba nepravdivé (ř. 1), první nepravdivý a druhý pravdivý (ř. 2), první pravdivý a druhý nepravdivý (ř. 3) a oba pravdivé (ř. 4). Sloupce 3, 4, 5, 6 jednoznačně definují uvedené logické spojky.

Konjunkce (sl. 3) – též logické násobení.

Formule $p \wedge q$ je pravdivá tehdy a jen tehdy, jsou-li oba argumenty pravdivé. (Viz ř. 4/sl. 3.)

Disjunkce (sl. 4) – logické sčítání.

Formule $p \vee q$ je pravdivá tehdy a jen tehdy, je-li pravdivý alespoň jeden argument. (Viz ř. 2, 3, 4/sl. 4.)

Implikace (sl. 5).

Formule $p \rightarrow q$ je pravdivá tehdy a jen tehdy, je-li první člen implikace nepravdivý anebo druhý člen implikace pravdivý. (Viz ř. 1, 2, 4/sl. 5.) Je-li první člen pravdivý a druhý nepravdivý, je implikace nepravdivá.

První člen implikace nazýváme *antecedentem* a druhý člen implikace *konsekventem*. V implikaci $p \rightarrow q$ je " p " antecedentem a " q " konsekventem. V implikaci $q \rightarrow (q \rightarrow r)$ je " q " antecedentem a kulatá závorka konsekventem. Uvnitř závorky je antecedentem " q " a konsekventem " r ". Rozhodující je tedy umístění člena v každé implikaci.

Ekvivalence (rovnost) sl. 6.

Formule $p \approx q$ je pravdivá tehdy a jen tehdy, jsou-li oba argumenty rovnocenné (mají stejnou pravdivostní hodnotu). (Viz ř. 1, 4/sl. 6.) Definiční tabulky bývají také nazývány pravdivostními funkcemi.

Příklad. Dosadíme za proměnnou p výrok „prší“, za proměnnou q výrok „jsem mokrý“.

	1	2	3	4	5	6
	p „prší“	q „jsem mokrý“	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \equiv q$
1	nepravda 0	nepravda 0	0	0	1	1
2	nepravda 0	pravda 1	0	1	1	0
3	pravda 1	nepravda 0	0	1	0	0
4	pravda 1	pravda 1	1	1	1	1

Tab. 4

Konjunkce (sl. 3) a *ekvivalence* (sl. 6) nevyžadují zvláštního komentáře.

/22/ Výrok „Prší a jsem mokrý.“ je jako celek pravdivý, jsou-li oba argumenty pravdivé (sl. 3, ř. 4).

/23/ Výrok „Prší tehdy a jen tehdy, jsem-li mokrý.“, resp.

/24/ tvrzení „Prší je rovnocenné s tvrzením jsem mokrý.“ je pravdivé, jsou-li oba argumenty rovnocenné (buď oba pravdivé nebo oba nepravdivé). (Viz sl. 6, ř. 1 a 4)

Disjunkce (sl. 4) je v národním jazyce vyjádřena logickou spojkou „nebo“. V češtině může mít spojka „nebo“ význam vylučující nebo nevylučující.

Výrok „Prší nebo jsem mokrý.“ ř. 2, 3, 4 je pravdivý, je-li pravdivý alespoň jeden argument. Je však pravdivý i tenkrát, jsou-li pravdivé oba argumenty. Jedno *nevylučuje* druhé.

Jiný význam má však „nebo“ užitý ve větě „Přijdu v úterý nebo přijdu ve středu.“. Zde jedno *vylučuje* druhé.

Podrobněji bude tento problém popsán v části „vztah mezi funktory výrokové logiky a logickými spojkami národního jazyka“ (str. 33).

Implikace je v dvouhodnotové extenzionální logice nazývána materiální implikací. Podrobněji bude o tom pojednáno v části

„vztah mezi funktoři ...“ (str. 33). Zde se spokojíme konstatováním, že pouze výrok

/26/ „Jestliže prší, pak nejsem mokrý.“

je nepravdivý. (Viz sl. 5, ř. 3.)

Vyhodnocování složených výroků

Máme-li definovány jednoznačně základní funktoři a víme, že ve výrokové logice pracujeme pouze s hodnotami „pravda“ – 1 anebo „nepravda“ – 0, můžeme přistoupit k vyhodnocování složených výroků.

Mějme složený výrok:

/27/ „Jestliže se spotřebuje bezin, auto se zastaví. Auto se nezastavilo, tedy benzin se nespotřeboval.“

Tento složený výrok se skládá z jednoduchých výroků

„Spotřebuje se benzin.“ – $p = 1$,

„Auto se zastaví.“ – $q = 1$,

„Auto se nezastaví.“, jde vlastně o výrok „Není pravda, že se auto zastaví.“, tedy $\bar{q}$,

„Benzin se nespotřeboval.“, analogicky $\bar{p}$.

Složený výrok tedy můžeme zapsat

$(p \supset q)$	implikace dvou pravdivých výroků je 1,
$[(p \supset q) \wedge \bar{q}]$	konjunkce pravdivostní hodnoty kulaté závorky s $\bar{q}$ (hodnota 0, protože q je 1) je 0,
$\bar{p} = 0$	protože p je 1,
$[(p \supset q) \wedge \bar{q}] \supset \bar{p}$	implikace pravdivostní hodnoty hranaté závorky s hodnotou 0 je 1.

Poznámka. Protože z definiční tabulky implikace víme, že implikace je vždy pravdivá, je-li první člen implikace 0, nemusíme již druhý člen implikace ani zkoumat!

Mějme dvě formule, které se od sebe liší pouze umístěním závorky, abychom zdůraznili její význam. Pro obě formule jsou dány pravdivostní hodnoty $p = 0, q = 0, r = 0$.

$$\begin{array}{cccc} /28/ & [p \supset (q \supset r)] & \text{př. } q & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & \underbrace{\quad\quad} & & \\ & 1 & & \\ & \underbrace{\quad\quad\quad} & & \\ & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} /29/ & [(p \supset q) \supset r] & \text{př. } q & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & \underbrace{\quad\quad} & & \\ & 1 & & \\ & \underbrace{\quad\quad\quad} & & \\ & 0 & & \\ & \underbrace{\quad\quad\quad} & & \\ & 0 & & \end{array}$$

Formule /28/ je pravdivá, kdežto formule /29/ nikoliv.

Tímto způsobem vyhodnocujeme formule, pokud známe pravdivostní hodnoty jednotlivých argumentů. Většinou tomu ale tak není a nás zajímá, za jakých podmínek je formule pravdivá a za jakých ne. Potom musíme pro formuli sestavit tabulku neboli matici a formuli vyhodnotit pro všechny varianty hodnot proměnných.

Vyhodnocování složených výroků (formulí) tabulkovou metodou (maticí)

Splnitelná formule

Máme za úkol vyhodnotit formuli

$$/30/ \quad [p \vee (q \wedge \bar{p})] \wedge \bar{q}.$$

	1	2	3	4	5	6	7
	p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$q \wedge \bar{p}$	$1 \rightarrow 5$	$6 \wedge 4$
1	0	0	1	1	1	1	1
2	0	1	1	0	1	1	0
3	1	0	0	1	0	0	0
4	1	1	0	0	1	1	0

Tab. 5

U této první matice si uvedeme podrobný komentář.

Sl. 1 a 2: Ve čtyřech řádcích jsou všechny možné kombinace dvou pravdivostních hodnot (0, 1), dvou argumentů p , q .

Sl. 3 a 4: Negace hodnot argumentů p , q .

Sl. 5: Disjunkce argumentů q a $\bar{p}$. Pravidlem je řešit nejprve kulaté závorky, potom hranaté závorky atd.

Sl. 6: Implikace, kde prvním členem je argument p a druhým členem pravdivostní hodnota kulaté závorky.

Sl. 7: Konjunkce pravdivostní hodnoty hranaté závorky a argumentu $\bar{q}$. To je konečná pravdivostní hodnota dané formule. Výsledkem vyhodnocení je zjištění, že formule $[p \vee (q \wedge \bar{p})] \wedge \bar{q}$ je pravdivá, je-li hodnota $p = 0$, a hodnota $q = 0$ (1. řádek). Ve všech ostatních případech je nepravdivá. Stejnou skutečnost můžeme formulovat slovy: funkce $[p \vee (q \wedge \bar{p})] \wedge \bar{q}$ je splněna tehdy a jen tehdy, je-li hodnota $p = 0$ a $q = 0$.

Formulím, které jsou za některých podmínek splněny a za některých nikoli (v některých řádcích mají ve výsledném sloupci hodnotu 1 a v jiných hodnotu 0), říkáme *splnitelné formule*.

Logické zákony (tautologie)

Naším dalším úkolem je zjistit, za jakých podmínek je pravdivá formule

$$/31/ \quad (p \oplus q) \oplus (\bar{q} \oplus \bar{p}).$$

Úkol splníme opět konstrukcí matice, tedy maticovou neboli tabulkovou metodou.

	1	2	3	4	5	6	7
	p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \rightarrow q$	$\bar{q} \oplus \bar{p}$	$5 \rightarrow 6$
1	0	0	1	1	1	1	1
2	0	1	1	0	1	1	1
3	1	0	0	1	0	0	1
4	1	1	0	0	1	1	1

Tab. 6

Ve výsledném sloupci 7 vidíme, že formule je pravdivá ve všech kombinacích hodnot argumentů p , q . Takovým formulím říkáme vždy pravdivé formule neboli logické zákony nebo tautologie.

Kontradikce

Mějme formuli

$$/32/ \quad \overline{\bar{p} \oplus (p \oplus q)}.$$

	1	2	3	4	5	6
	p	q	$\bar{p}$	$p \rightarrow q$	$\bar{p} \oplus 4$	$\overline{\text{sl. 5}}$
1	0	0	1	1	1	0
2	0	1	1	1	1	0
3	1	0	0	0	1	0
4	1	1	0	1	1	0

Tab. 7

Ve výsledném sloupci 6 vidíme, že jde o formuli, která není za žádných okolností pravdivá. Takovému výroku říkáme kontradikce nebo vždy nepravdivý neboli kontradiktorický výrok.

Je samozřejmé, že negace kontradikce je tautologií a negace tautologie je kontradikcí.

Mějme formuli

$$/33/ [(p \supset q) \wedge (q \supset r)] \supset (p \supset r).$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
	p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$4 \wedge 5$	$p \rightarrow r$	$6 \rightarrow 7$
1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1	1	1
3	0	1	0	1	0	0	1	1
4	0	1	1	1	1	1	1	1
5	1	0	0	0	1	0	0	1
6	1	0	1	0	1	0	1	1
7	1	1	0	1	0	0	0	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1

Tab. 8

Ve sl. 8 zjišťujeme ve všech řádcích pravdivostní hodnoty 1. Jde tedy o tautologii. Konkrétně se jedná o velmi významný zákon **hypotetického sylogismu** (resp. o jednu z jeho variant).

- „Je-li nějaké číslo dělitelné 6 a číslo 6 je dělitelné 3, pak toto nějaké číslo je dělitelné 3.“
- „ $[(x > y) \wedge (y > r)] \supset (x > r)$ “
- „Je-li pan Novák pracovníkem pedagogické fakulty a pedagogická fakulta je součástí ZČU, pak je pan Novák pracovníkem ZČU.“
- „Každý výrobce má zájem exportovat. Exportovat lze pouze kvalitní výrobky. Každý výrobce má zájem vyrábět kvalitní výrobky.“

Atd.

Těchto několik příkladů chce demonstrovat platnost logických zákonů ve všech oblastech (matematika, pracovně právní vztah, ekonomie).

Závěrem části „Vyhodnocování složených výroků (formulí) tabulkovou (maticovou) metodou“ lze zobecnit předchozí výklad.

- 1) Funkční závislost počtu řádků tabulky na počtu argumentů a pravdivostních hodnot je

$$p = n^m,$$

p = počet řádků, n = počet hodnot, m = počet argumentů.

- 2) Jakékoli tautologie o stejném počtu argumentů jsou ekvivalentní.

Jakékoli kontradikce o stejném počtu argumentů jsou ekvivalentní.

- 3) Máme-li nějaké formule $F_1, F_2, \star, F_n$ o stejném počtu argumentů, které mají ve výsledném sloupci ve stejných řádcích tytéž pravdivostní hodnoty 1, 0 nazýváme je ekvivalentními formulemi.

Každá taková ekvivalence ($F_1 \approx F_2, F_2 \approx F_n$) je tautologií ve smyslu našeho výkladu.

Příklad. Ad 1: Budeme-li tabulkou vyhodnocovat formuli dvouhodnotové logiky o argumentech p, q, r, s, t, w (jde o složený výrok o 6 výrocích jednoduchých), bude mít tabulka

$$p = n^m, n = 2, m = 6$$

$$p = 2^6 = 64 \text{ řádků.}$$

Ad 2: Zákon kontrapozice $(p \supset q) \supset (\bar{q} \supset \bar{p})$

Zákon Dunse Scotta $\bar{p} \supset (p \supset q)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \rightarrow q$	$\bar{q} \supset \bar{p}$	$5 \rightarrow 6$	$\bar{p} \supset 5$	$7 \equiv 8$
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	0	1	1	1	1	1
3	1	0	0	1	0	0	1	1	1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \rightarrow q$	$\bar{q} \underline{\vee} \bar{p}$	$5 \rightarrow 6$	$\bar{p} \underline{\vee} 5$	$7 \equiv 8$
4	1	1	0	0	1	1	1	1	1

Tab. 9

Ve sl. 7 je výsledný sloupec zákona kontrapozice, ve sl. 8 je výsledný sloupec tabulky zákona Dunse Scotta. Protože ekvivalence je pravdivá, jsou-li dva argumenty rovnocenné, je dokázáno ve sl. 9, že jsou oba zákony ekvivalentní. Stejným způsobem se dokazuje ekvivalence dvou kontradikcí.

Ad 3: Mějme výroky:

/34/ „Jestliže nepřijdeš, pak půjdu do kina sám.“

/35/ „Není pravda, že nepřijdeš a nepůjdu do kina sám.“

Výroky: „Přijdeš.“ – p
 „Půjdu do kina sám.“ – q

Formalizace /34/: $\bar{p} \underline{\vee} q$

Formalizace /35/: $\overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
	p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	34: $\bar{p} \underline{\vee} q$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	35: $\overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}$	$5 \equiv 7$
1	0	0	1	1	0	1	0	1
2	0	1	1	0	1	0	1	1
3	1	0	0	1	1	0	1	1
4	1	1	0	0	1	0	1	1

Tab. 10

Ve sl. 5 je vyhodnocení výroku /34/, ve sl. 7 vyhodnocení výroku /35/. Protože ekvivalence je pravdivá, jsou-li obě pravdivostní hodnoty rovné, je dokázáno ve sl. 8, že jde o složené výroky se stejnou pravdivostní hodnotou.

Úplný přehled funktorů

Zatím jsme ve výkladu používali pouze funktory (logické spojky) negace, konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence. Samotný pohled na matici definující tyto funktory nás přivádí k tomu, že těchto funktorů musí být více. I jejich počet lze odvodit.

Uvedme definici funktoru:

Funktor (operátor) je taková částice, která ve spojení s jedním nebo oběma argumenty (jednoargumentový nebo dvouargumentový funktor) určuje pravdivostní hodnotu složeného výroku v závislosti na všech možných kombinacích hodnot argumentů.

Počet funktorů je dán hodnotou funkce

$$F = n^{(n^m)} = n^P$$

$$P = n^m$$

n = počet pravdivostních hodnot, m = počet argumentů, P = počet řádků matice.

Tabulka jednoargumentových funktorů dvouhodnotové logiky

Počet funktorů $F = n^{(n^m)} = n^P$,

$$P = n^m = 2^1 = 2,$$

$$F = 2^2 = 4.$$

		1	2	3	4
	p	F_1	p	$\bar{p}$	V_1
1	0	0	0	1	1
2	1	0	1	0	1

Tab. 11

Ve sloupci 1 je argument " p ", který může nabýt hodnot 0 (ř. 1), 1 (ř. 2).

Sl. 1: Funktor zvaný **falsum** jednoargumentové ($"F_1"$) vytváří se svým argumentem konstantní funkci, jejíž hodnota je vždy nulová (nepravda).

Je-li výrok "p" pravdivý, je výrok $"F_1"$ p nepravdivý. Je-li výrok "p" nepravdivý, je výrok $"F_1"$ p pravdivý.

Sl. 2: Funktor zvaný aserce (identická funkce). Vytváří se svým argumentem funkci, jež má vždy stejnou pravdivostní hodnotu jako argument. Proto nezavádíme speciální symbol a říkáme, že „p se opakuje“. Teoreticky je mezi nimi pouze ten rozdíl, že p patří do množiny argumentů, kdežto „opakující se p“ do množiny složených výroků (formulí).

Sl. 3: Funktor zvaný negace. Vytváří se svým argumentem funkci, jejíž pravdivostní hodnota je vždy opačná, nežli hodnota argumentu.

Sl. 4: Funktor zvaný verum jednoargumentové ($"V_1"$) vytváří se svým argumentem konstantní funkci, jejíž hodnota je vždy „pravda“ – 1.

Prakticky je v hovorovém jazyce využíván pouze funktor negace jako opak daného tvrzení.

Tabulka dvouargumentových funkcí dvouhodnotové logiky

Počet funkcí $F = n^{(n^m)} = n^P$

$$P = n^m = 2^2 = 4,$$

$$F = 2^4 = 16.$$

			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	p	q	F_2	$\wedge$	$\nrightarrow$	p	$\mathcal{Q}$	q	$\equiv$	$\vee$	$\neg$	$\equiv$	$\bar{q}$	$\neg$	$\bar{p}$	$\rightarrow$		V_2
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Tab. 12

K tabulce 12 můžeme dospět také následující úvahou: Zatím jsme pracovali s funkcí konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence. Ty jsou definovány tab. 3 (str. 17). Víme již také, že negace udílí

každé formuli opačnou pravdivostní hodnotu. Můžeme tedy tab. 3 rozšířit o příslušné negace:

			1	2	3	4	5	6	7	8
	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \equiv q$	$\overline{p \rightarrow q}$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p \equiv q}$
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
2	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
3	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
4	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Tab. 13

Pozorný čtenář si již nyní povšimne, že chybí 8 sloupců, aby byly vyčerpány všechny varianty. Musí tedy existovat dalších 8 funktorů, které těmto chybějícím sloupcům odpovídají.

Příklad. Musí existovat funktor, který udělí výroku složenému z argumentů p, q hodnotu 0 při $p = 0, q = 1$ a ve všech ostatních případech hodnotu 1, dále funktor, vyjadřující negaci tohoto funktoru atd. Pak můžeme dohledat všechny zbývající funktory.

q

Komentář k tab. 12. Sloupce 1 až 8 jsou negací sloupců 9 až 16.

Sl. 1:**Falsum dvouargumentové.** Funktor, který se svými argumenty vytváří výrok, jehož pravdivostní hodnota je vždy „nepravda“ – 0. Tato formule je ekvivalentní každé kontradikci o stejném počtu argumentů.

Sl. 2:**Konjunkce:** viz tab. 3, negace Shefferovy funkce. Platí ekvivalence $p \wedge q \approx \overline{p \rightarrow q}$.

Sl. 3:**Negovaná implikace.** Je pravdivá tehdy a jen tehdy, je-li antecedent pravdivý ("1") a konsekvent nepravdivý ("0"). Platí ekvivalence $p \rightarrow q \approx \overline{p \wedge \overline{q}}$.

Sl. 4:**Aserce p.** Funktor, který z jednoduchých výroků vytváří výrok složený, jehož pravdivostní hodnota je stejná jako hodnota $p - p \rightarrow p$. Pravdivostní hodnota argumentu q nemá na výrok vliv.

- Sl. 5:**Negovaná obrácená implikace.** Složený výrok s funktorem δ nabývá pravdivostní hodnoty 1 tehdy a jen tehdy, je-li antecedent nepravdivý a konsekvent pravdivý.
- Sl. 6:**Aserce q :** analogicky dle komentáře aserce p .
- Sl. 7:**Antivalence:** (alternativa, ostrá disjunkce, vylučující „nebo“). Je pravdivá tehdy a jen tehdy, jsou-li oba argumenty různé. Platí ekvivalence $p \approx q \approx \overline{p \approx q}$.
- Sl. 8:**Disjunkce:** viz tab. 3, negace Peircovy funkce. Platí ekvivalence $p \sqcup q \approx \overline{p \sqcap q}$.
- Sl. 9:**Peircův (Nicod – Lukasiewiczův) funktor.** Výrok je pravdivý tehdy a jen tehdy, jsou-li oba jednoduché výroky nepravdivé. Platí ekvivalence $p \sqcap q \approx \overline{p \sqcup q}$. Tento funktor může nahradit negaci (viz str. 56)
- Sl. 10:**Ekvivalence:** viz tab. 3. Platí ekvivalence $p \approx q \approx \overline{p \approx q}$.
- Sl. 11:**Negace q :** viz tab 2. Funktor, který udílí výroku opačnou pravdivostní hodnotu než má q .
- Sl. 12:**Obrácená implikace.** Formule $p \oslash q$ je pravdivá tehdy a jen tehdy, je-li antecedent pravdivý a konsekvent libovolný, anebo konsekvent nepravdivý a antecedent libovolný. (Pravdivý výrok implikuje jakýkoliv výrok, nepravdivý výrok je implikován čímkoliv.)
- Sl. 13:**Negace p :** viz tab. 2.
- Sl. 14:**Implikace:** viz tab. 3. Je pravdivá tehdy a jen tehdy, je-li antecedent nepravdivý anebo konsekvent pravdivý. Často bývá tato skutečnost uváděna jako paradox implikace. V následujícím textu bude funktoru implikace, obrácené implikace a jejich negacím věnován samostatný výklad. (Viz části: Vztah mezi funktory výrokové logiky a spojkami národního jazyka str. 33, pravidlo substituce a odloučení str. 42)
- Sl. 15:**Shefferův funktor (... je neslučitelné s ...):** Tato funkce je splněna (výrok je pravdivý) tehdy a jen tehdy, je-li alespoň jeden argument nepravdivý (má hodnotu "0"). Shefferův funktor je spolu s Peircovým mimořádně významný a bude o něm v následující části „Normální formy“ ještě pojednáno.

Sl. 16: **Verum dvouargumentové.** Funktor vytvářející se svými argumenty výrok pravdivý. (Aniž závisí na pravdivostních hodnotách argumentů.) Je ekvivalentní každé tautologii o stejném počtu argumentů.

Dvouhodnotovost a extenzionalita.

Ta součást logiky, kterou se zde zabýváme, je dvouhodnotová a extenzionální.

To znamená, že pravdivostní hodnota složené výrokové formule (výroku) závisí pouze na hodnotách “1” a “0” formulí (výroků) jednoduchých (dvouhodnotovost) a na tom, jak jsou definovány logické spojky (funktory). Formule $(p \supset \bar{q}) \supset (p \supset r)$, za předpokladu, že $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$, je pravdivá. Čtenář nechť se o tom sám přesvědčí.

Dvouhodnotovost a extenzionalita.

Ta součást logiky, kterou se zde zabýváme, je dvouhodnotová a extenzionální. To znamená, že pravdivostní hodnota složené výrokové formule závisí pouze na hodnotách pravda a nepravda (1 a 0) formulí jednoduchých (dvouhodnotovost) a na tom, jak jsou definovány logické spojky (funktory) (extenzionalita).

Příklad.

$(p \supset \neg q) \supset (\neg p \supset r)$, za předpokladu, že $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$ je pravdivá. Čtenář necht' se o tom sám přesvědčí.

Vztah mezi funkcory výrokové logiky a logickými spojkami národního jazyka

Některé funkory dvouhodnotové logiky mají definován svůj význam v souladu s hovorovým jazykem. U jiných se význam nekryje a existují i případy, kdy je mylně předpokládána samozřejmost a dochází k logickým nepřesnostem. Takové nepřesnosti mohou přinést zbytečné spory v diskusi, nedorozumění v polemikách a závažné důsledky ve vědeckých pracích.

Pregnantnost ve vyjadřování by měla být pokládána za samozřejmou u každého, kdo vystupuje veřejně na jakékoli úrovni. Povinná by měla být u vysokoškolsky vzdělaných lidí včetně učitelů. O nedostatečné úrovni přesnosti vyjadřování svědčí neustálé poukazy na „nedorozumění“, nesprávné „pochopení“, „mylné“ interpretace atd., na něž se stále kdekdo odvolává.

Aby bylo možno omyly a nepřesnosti vyloučit, je nutno stanovit, jak jsou jednotlivé funkory chápány. Studium logiky zde plní tuto úlohu a stává se povinností každého, bez ohledu na to, bude-li učitelem, politikem, vychovatelem, publicistou či vědeckým pracovníkem.

Především je nutno respektovat skutečnost, že zatímco v logice jsou funktory pojímány přísně extenzionálně, což znamená, že pravdivostní hodnoty výroků složených pomocí těchto funktorů závisí *výhradně* na pravdivostních hodnotách výroků vstupních, v národním jazyce tomu tak nebývá. (Viz dále např. výklad implikace.)

V národním jazyce se užívá výrazů, které mají význam logických spojek. (Např. vždy, pokaždé, jedině tenkrát.) Pokud složený výrok formalizujeme, upravujeme si takové věty do podoby bližší logické terminologii.

Příklad. „Vždy, když budu mít čas, přijdu.“

„Přijdu pokaždé, budu-li mít čas.“

„Přijdu jedině tenkrát, budu-li mít čas.“

„Přijdu tehdy a jen tehdy, budu-li mít čas.“

„Mít čas je pro mne totéž, jako přijít.“

atd.

Všechny tyto konkrétní složené výroky mají smysl:

„Budu mít čas.“ – výroková proměnná p

„Přijdu.“ – výroková proměnná q

$$p \approx q.$$

Ve všech případech pravdivost celého složeného výroku závisí na pravdivostních hodnotách p , q a na definovaném významu funktoru ekvivalence ($\approx$).

q

Větu

/36/ „Vždy, když budu mít čas, přijdu a vždy když nebudu mít čas, budu studovat.“ formalizujeme:

$$(p \approx q) \Leftrightarrow (\bar{p} \approx \bar{q}), \text{ tab. 14, sl. 7.}$$

Nutnost umístit funktor $\approx$ je dána příslovcem „vždy“. Pokud toto příslovce v hovoru někdo opomene, výrok nabude významu

/37/ „Budu-li mít čas, pak přijdu a nebudu-li mít čas, pak budu studovat.“, odtud formalizovaný tvar

$$(p \supset q) \rightarrow (\bar{p} \supset r), \text{ tab. 14, sl. 10.}$$

Konečně třetí účastník rozhovoru může bez hlubšího uvažování říci

/38/ „Budu-li mít čas, pak přijdu a vždy, když nebudu mít čas, budu studovat.“,

$$(p \supset q) \rightarrow (\bar{p} \approx r), \text{ tab. 14, sl. 11.}$$

Jak se projeví taková ledabylost a nepozornost ve výsledném znázornění matice.

							/36/			/37/	/38/
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	p	$\bar{p}$	q	r	$p \equiv q$	$\bar{p} \approx r$	$5 \wedge 6$	$p \rightarrow q$	$\bar{p} \supset r$	$8 \wedge 9$	$8 \wedge 6$
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
4	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
5	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
6	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
7	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
8	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0

Tab. 14

Příklady výroků /36/, /37/ a /38/ ukazují, že jejich význam není totožný. V případě $p = 0, q = 1, r = 1$ (ř. 4, tab. 14) se výrok /36/ liší pravdivostní hodnotou od výroků /37/, /38/ a $p = 1, q = 1, r = 1$ (ř. 8, tab. 14) je pouze výrok /37/ pravdivý.

Důkaz různosti výroků /36/, /37/, /38/ je možno podat i jinou metodou a ještě se k nim vrátíme.

Největší shoda mezi teorií výroků a hovorovou řečí je u funktoru *konjunkce* (formalizovaný zápis $P \rightarrow Q$, v národním jazyce „... a ...“, „... spolu s ...“ apod.) a *Shefferova funktoru* (formalizovaný zápis

” $p|q$ ”, „ p je neslučitelné s q “, v národním jazyce „... nemůže být zároveň s ...“, „nemůže současně platit ... a ...“ apod.

Disjunkce

Zde existují určité rozdíly. Zatímco např. v latině je nevylučující ”nebo” vyjádřeno pojmem *vel* a vylučující ”nebo” pojmem *aut*, v češtině je pouze jediná spojka „nebo“.

Rozdíl těchto dvou významů je patrný z následující tabulky.

	1	2	3	4	5	6	7
	p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$3 \wedge 6$
1	0	0	0	0	0	1	0
2	0	1	1	1	0	1	1
3	1	0	1	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1	0	0

Tab. 15

Disjunkce je ve výrokové logice definována tak, že je pravdivá, je-li alespoň jeden argument pravdivý. To znamená ale, že je pravdivá i v případě, kdy jsou pravdivé oba resp. všechny argumenty. Tento případ (viz ř. 4 tab. 15) není definicí vyloučen, proto „nevylučující nebo“ (sl. 3).

Pokud je nutné tuto možnost vyloučit, použijeme v národním jazyce frázi

„bud’ ... nebo ...“,

„... anebo ...“,

případně přímo řekneme

„... nebo ... ve smyslu vylučujícím“ (viz sl. 4, tab. 15).

Ve formalizovaném tvaru nutno vylučující nebo vyjádřit

$$(p \wedge q) \wedge (\overline{p \wedge q}), \text{ viz sl. 7 tab. 15.}$$

Protože konjunkce $(p \wedge q) \wedge (\overline{p \wedge q})$ je ekvivalentní antivalenci (viz sl. 4, tab. 15), která je nám známou negací ekvivalence, užíváme

tohoto funktoru vždy, kdy potřebujeme použít vylučujícího „nebo“. Řekneme tedy „ p je antivalentní q “.

Ve verbálním tvaru lze rozdíl demonstrovat na výrocích.

/39/ „Přijde Karel nebo Václav.“

(Může přijít kterýkoliv z nich nebo oba.)

/40/ „Přijde buď Karel anebo Václav.“

(Může přijít pouze jeden z nich.)

U výroků /39/, /40/ je nutno, má-li být informace jednoznačná, rozlišit disjunkci a antivalenci.

U výroku

/41/ „Přijdu pěšky nebo přijedu na kole.“

není rozlišení nutné, protože již z kontextu plyne, že jde o formu vylučovací.

U disjunkce je ještě vhodné upozornit na to, že jde-li o výrok, který je disjunkcí většího počtu výroků, stačí pravdivost jediného z nich pro uznání pravdivosti celého složeného výroku.

Protože disjunkce je negací Peircova funktoru, je zmíněná problematika i součástí Peircových funkcí.

Implikace

V logice rozlišujeme materiální implikaci, striktní implikaci a implikaci běžně chápanou v hovorové řeči. O striktní implikaci bude pojednáno v části neklasické logiky.

Implikace materiální (viz tab. 16 sl. 5)

je implikace, kterou jsme definovali v tab. 3, sl. 5.

Je pravdivá vždy, je-li nepravdivý antecedent nebo pravdivý konsekvant. Tzv. paradox implikace, že

„nepravdivý výrok implikuje každý výrok“ a

„pravdivý výrok je implikován čímkoli“,

vede k tomu, že jsou uváděny absurdní příklady a čtenáři uvádění v úžas.

Výrok

/42/ „Jestliže č. 8 je dělitelné 3, pak je každý z nás milionářem.“

je dle zásad logiky pravdivý. (Antecedent má pravdivostní hodnotu 0).

Nepravdivý je výrok

/43/ „Jestliže po pondělku následuje úterý, pak jsme všichni milionáři.“.

(Antecedent je pravdivý, konsekvent nepravdivý.)

Výroková logika nevyžaduje obsahovou souvislost mezi 1. a 2. členem implikace. Ve vývoji a výzkumu formální logiky se od obsahové souvislosti abstrahuje.

/44/ „Je-li dnes pondělí, jsem prezidentem republiky.“

V pondělí antecedent = 1, konsekvent = 0. Implikace je nepravdivá.

Všechny ostatní dny je implikace pravdivá, neboť moje „prezidentství“ je implikováno nepravdou v antecedentu.

Vždy je tato implikace pravdivá, pronese-li tento výrok současný prezident ČR.

V národním jazyce se naopak obsahová souvislost implikací spojovaných výroků předpokládá. Můžeme to chápat tak, že antecedent je v konsekventu nějakým způsobem „obsažen“.

„Jestliže je číslo sudé, pak je dělitelné dvěma.“

„Jestliže je číslo dělitelné 2 a 3, pak je dělitelné 6.“

/45/ „Jestliže je pan X posluchačem Pedagogické fakulty, pak je vysokoškolačkem.“

atd.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$	$5 \wedge 7$	$5 \equiv 7$	$p \equiv q$	$\bar{q} \Leftrightarrow \bar{p}$	$5 \rightarrow 11$	$5 \equiv 11$
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
3	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$	$5 \wedge 7$	$5 \equiv 7$	$p \equiv q$	$\bar{q} \Leftrightarrow \bar{p}$	$5 \rightarrow 11$	$5 \equiv 11$
4	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tab. 16

Logická spojka "jestliže ..., pak ..." je chápána způsobem odpovídajícím řádku 4, sl. 5, tab. 16.

Pravdivý je antecedent, konsekvent a tudíž celá implikace. V hovorovém jazyce se pokládá za nesmyslné formulovat věty tvaru implikace s nepravdivým předním členem, i když jsou pravdivé. Výrokový kalkul musí však s ohledem na systém tyto složené výroky respektovat.

Velmi častou chybou při argumentaci je záměna antecedentu a konsekventu.

Z výroku /45/ nelze učinit závěr $q \Leftrightarrow p$,

/46/ „Jestliže je pan X vysokoškolačkem, pak je posluchačkem PEF.“.

To je celkem každému pochopitelné. Přesto jsme ale velice často svědky tvrzení

/47/ „Jestliže je někdo zločincem, pak je na Borech.“

a z toho odvozeno

„Je na Borech, tedy je zločincem.“,

což je evidentní logická chyba.

Že nejsou výroky /45/ a /46/ totožné, vidíme ve sl. 5 a 6 tab. 16 (liší se ve 2. a 3. řádku).

V hovorové řeči je implikace chápána jako ekvivalence a proto bývá jako taková libovolně převracena (zaměňován antecedent a konsekvent).

Velmi často se místo "... tehdy a jen tehdy, když ..." použije tvrzení "jestliže ..., pak ...".

Příklad. /48/ „Ke zkoušce půjdu tehdy a jen tehdy, budu-li připraven.“

Tato skutečnost se vyjádří

/49/ „Jestliže půjdu ke zkoušce, pak budu připraven.“.

Vyjádřeno je to jako implikace, míněno jako ekvivalence. Při důsledném uplatňování zásad výrokové logiky je rozdíl patrný z tabulky (viz tab. 16).

Implikace viz sl. 5 tab. 16, sl. 5 a 6 má v řádcích 1 a 4 tytéž pravdivostní hodnoty jako ekvivalence. Vzájemné záměny obou argumentů by tedy byly možné. Ovšem v řádcích 2 a 3 již nemožnost náhrad ekvivalence implikací vystupuje. Není možné tedy z výroku „Přijdu ke zkoušce.“ usoudit na pravdivost výroku „Jsem připraven.“.

q

Záměna antecedentu a konsekventu mění pravdivostní hodnotu implikace. (Jde o obrácenou implikaci δ_l , tab. 12. sl. 12). Takové úpravě implikace říkáme **konverze**.

Inverze implikace znamená negaci antecedentu i konsekventu: $\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$. I ona mění pravdivostní hodnotu implikace – viz tab. 16, sl. 7 a vytváří též „obrácenou implikaci“ viz tab. 12, sl. 12).

Mějme složený výrok

/50/ „Koupíš-li lístky, půjdu do kina a nekoupíš-li, nepůjdu (do kina).“.

„Koupíš lístky.“ – výrok p ,

„Půjdu do kina.“ – výrok q ,

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}).$$

Konjunkce těchto dvou implikací je vyhodnocena ve sl. 8, tab. 16. Vidíme, že průběh pravdivostních hodnot je totožný s ekvivalencí. Můžeme tedy učinit závěr, že konjunkce implikace s její inverzí je ekvivalentní ekvivalenci implikace s inverzí a ekvivalenci antecedentu a konsekventu implikace.

$$\left[\underbrace{(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q})}_{\text{sl. 8}} \right] \approx \left[\underbrace{(p \Leftrightarrow q) \approx (\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q})}_{\text{sl. 9}} \right] \approx \underbrace{\left(\underbrace{p}_{\text{sl. 10}} \approx q \right)}$$

Protože relace ekvivalence je komutativní, platí také $q \approx p$. Dosadíme-li zpětně konkrétní výroky, vidíme, že skutečně odpovídá realitě tvrzení

„Koupíš-li lístky, půjdu do kina a nekoupíš-li, nepůjdu.“

a je totéž jako

„Koupíš-li lístky, půjdu do kina tehdy a jen tehdy, platí-li, že nekoupíš-li, nepůjdu.“

a jako

„Do kina půjdu pouze tenkrát, koupíš-li lístky.“.

Inverzní výrok je nadbytečný a není většinou v hovorové řeči uváděn.

Kontrapozice (transpozice)

Provedeme-li současně konverzi a inverzi dostaneme kontrapozici, která nemění hodnotu původní implikace

$$(p \supset q) \supset (\bar{q} \supset \bar{p}), \text{ viz sl. 12, tab. 16}$$

nebo jeho varianta

$$(p \supset q) \approx (\bar{q} \supset \bar{p}), \text{ viz sl. 13, tab. 16.}$$

Jde o jeden ze zákonů výrokové logiky: zákon kontrapozice (transpozice) (Z 16).

Úsudky modus ponens a modus tollens

Velice důležitou vlastností implikace je možnost rozvíjet nějaký formalizovaný systém. K tomu je nutno zabezpečit určité základní podmínky:

1. Množinu vždy pravdivých formulí.
2. Pravidla odvozování.

Ad 1: Všechny pravdivé formule (tautologie)

a) axiomy (výchozí formule)

b) teorémy (odvoditelné formule).

Ad 2: Pravidla odvozování (jejich počet je možno rozšiřovat, my si uvedeme dvě základní):

P1: pravidlo substituce (dosazení),

P2: pravidlo odloučení (modus ponens).

P1: Jestliže v libovolné, vždy pravdivé formuli, substituujeme za nějakou proměnnou jinou výrokovou proměnnou nebo správně utvořenou formuli na všech místech, kde se vyskytuje, je výsledná formule vždy pravdivou formulí (tautologií).

Příklad. Mějme množinu vždy pravdivých formulí o dvou prvcích

M 1. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \leftrightarrow \bar{p})$ zákon kontrapozice (Z 16)

M 2. $p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ (Z 13)

V tautologii

1.1 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \leftrightarrow \bar{p})$ substituujeme q $p \rightarrow q$ (čteme: za q dosad' $p \rightarrow q$),

1.2 $[p \leftrightarrow (p \rightarrow q)] \leftrightarrow [(\overline{p \rightarrow q}) \leftrightarrow \bar{p}]$.

P2: Je-li dána nebo odvozena vždy pravdivá formule, která má tvar implikace a antecedent této implikace je vždy pravdivou formulí, nemůže mít konsekvent jinou pravdivostní hodnotu, než 1 (pravda). Je tedy také tautologií. Můžeme proto antecedent odloučit a dále pracovat pouze s konsekventem.

V našem příkladu je 1.2 vždy pravdivá formule

2.1 $[p \leftrightarrow (p \rightarrow q)] \leftrightarrow [\overline{p \rightarrow q} \leftrightarrow \bar{p}]$ antecedentem je vždy pravdivá formule M 2.

Můžeme ji tedy odloučit
a pokládat konse- kvent

$$2.2 \quad \overline{p \rightarrow q} \Leftrightarrow \bar{p}$$

za dokázanou tautolo-
gií.

Naši množinu vždy pravdivých formulí můžeme rozšířit o třetí prvek
(M 3).

$$M\ 3. \quad \overline{p \rightarrow q} \Leftrightarrow \bar{p}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	p	q	$\bar{p}$	M1	M2	$p \vee q$	$\overline{p \rightarrow q}$	$7 \rightarrow 3$	$5 \rightarrow 8$
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1	0	1	1
3	1	0	0	1	1	1	0	1	1
4	1	1	0	1	1	1	0	1	1

Tab. 17

Ve sl. 4 jsou pouze hodnoty 1 (jde o tautologii M 1).
Ve sl. 5 jsou pouze hodnoty 1 (jde o tautologii M 2).
Ve sl. 8 je vyhodnocení konsekventu implikace 1.2. a
ve sl. 9 je vyhodnocení celé implikace 1.2.

Je tím současně podán důkaz, že tato implikace je tautologií a že její
konsekvent, po odloučení antecedentu (M 2 sl. 5) je též tautologií
(viz sl. 8).

Obecný tvar úsudku modus ponens

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q.$$

Obecný tvar úsudku modus tollens

$$[(p \rightarrow q) \wedge \bar{q}] \rightarrow \bar{p}.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \rightarrow q$	$5 \wedge 1$	$6 \rightarrow 2$	$5 \wedge 4$	$8 \rightarrow 3$
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1

2	0	1	1	0	1	0	1	0	1
3	1	0	0	1	0	0	1	0	1
4	1	1	0	0	1	1	1	0	1

Tab. 18

Ve sl. 7 tab. 18 je výsledek tautologie modus ponens,
ve sl. 9 tab. 18 je výsledek tautologie modus tollens.

Pro *modus ponens* je charakteristická řádka 4 tabulky implikace: je-li implikace jako celek pravdivá (ř. 4, sl. 5) a pravdivý antecedent (ř. 4, sl. 1) nemůže být již pro hodnotu konsekventu jiná možnost než hodnota 1 (ř. 4, sl. 2)

Pro *modus tollens* je naopak charakteristická ř. 1 tabulky implikace: je-li implikace jako celek pravdivá (ř. 1, sl. 5) a konsekvent nepravdivý (ř. 1, sl. 2) nemůže být antecedent jiný než nepravdivý (0) (ř. 1, sl. 1.).

Závěrem výkladu některých specifických rysů základních funktorů dvouhodnotové logiky je nutno se zmínit ještě o jednoargumentovém funktoru „negace“. Na první pohled se zdá, že v užívání funktoru negace nemůže dojít ke komplikacím. Opak je pravdou.

Někdy se jedná o problém sémantický a vůbec o vymezení pravdy jako opaku nepravdy u výroků, které nemají svůj reálný předmět.

Víme, že „negace dává výroku opačnou hodnotu“, tak je definována.

Příklad. /51/ „Zde nebyl spatřen mimozemšťan.“

Negací je výrok

/51.1/ „Není pravda, že zde nebyl spatřen mimozemšťan.“.

Z hlediska pravdivosti, resp. nepravdivosti výroku ve výrokové logice je vše v pořádku.

Výrok /51/ však lze interpretovat dle zákona o dvojí negaci

/51.2/ „Mimozemšťan zde byl spatřen, ačkoliv ho nikdo neviděl.“.

Tato problematika však přesahuje rámec námi řešené látky.

Značné problémy v užívání funktoru negace nastanou, je-li v hovorové řeči funktor nahrazen předponou „ne-“.

Příklad. /52/ Výrok „Řešení úkolu je možné.“,

jeho negací je

/52.1/ „Není pravda, že řešení úkolu je možné.“.

Jiný význam má však výrok

/52.2/ „Řešení úkolu je nemožné.“.

Výrok /52.1/ je negací výroku /52/. Popírá *možnost*, ale netvrdí *nemožnost* /52.2/. Jde o problematiku trojhodnotové logiky, která není součástí tohoto textu. V trojhodnotové logice platí, že modální částice „možná“ má pravdivostní hodnotu $\frac{1}{2}$ právě tak, jako její negace.

Podobně můžeme řešit příklady

/53/ „Ebenové dřevo je bílé.“ (pravdivostní hodnota 0),

/53.1/ „Není pravda, že ebenové dřevo je bílé.“ (pravdivostní hodnota 1),

což reálně znamená, že může být hnědé, černé, hnědočerné atd.

Za negaci nelze pokládat výrok

/53.2/ „Ebenové dřevo je černé.“.

/54/ „Tento člověk se vydal nepravým směrem.“

Negací je

„Není pravda, že se tento člověk vydal nepravým směrem.“.

Opět to lze v hovorovém smyslu chápat tak, že se

/54.1/ „Tento člověk se vydal směrem pravým, tedy správným.“

nebo

/54.2/ „Nevydal se doleva.“ (na levou stranu), „Vydal se doprava.“.

”Nebo” je zde přímo ukázková disjunkce nevylučující, protože mohou platit současně oba významy. (Šel „správným“ směrem a na pravou stranu).

/55/ „V zápisníku mám poznámky z filosofie (filosofické), z politologie (politologické) a z logiky (logické), pak oddělím-li z nich ty filosofické a politologické, oddělil jsem poznámky ne-logické.“

Platí tedy tvrzení, že

/55.1/ „Není pravda, že tyto poznámky jsou logické“ (týkají se filosofie a politologie), nelze však říci

/55.2/ „Tyto poznámky jsou nelogické.“
(tj. postrádají logiku obsahově).

q

Obecně lze tyto informace uzavřít konstatováním, že tato problematika může být kvalifikovaně řešená pouze za využití znalostí sémantiky, metajazyka, kalkulu množin (tříd), pravděpodobnostní a trojhodnotové logiky. My se spokojíme s tím, že upozorníme na nebezpečí nahrazování funktoru ”není pravda, že” předponou „ne-“. Za negovaný výrok budeme pokládat zásadně jakýkoli daný výrok, před nějž umístíme ”není pravda, že”, nikoliv výrok, který má zdánlivě opačný význam sémanticky, ale kde funktor negace chybí.

Příklad. /56/ „Stojí na pravé straně.“

negací je

/56.1/ „Není pravda, že stojí na pravé straně“

a nikoli

/56.2/ „Stojí na levé straně.“.

Negací výroku /56.1/ pak je

/56.3/ „Není pravda, že není pravda, že stojí na pravé straně.“.

Jako poslední příklad si uvedeme výrok

/57/ „Tento čin je morální.“.

Za negaci budeme pokládat

/57.1/ „Není pravda, že tento čin je morální.“

a nikoli tvrzení

/57.2/ „Tento čin je nemorální.“.

Každý cítí, že mezi tím „nebýt morální“ a „být nemorální“ je značný rozdíl.

q

Souhrnem k funktoru negace

- 1) Negaci vyjádříme slovy „není pravda, že ...“.
- 2) Negace udílí výroku (formuli) opačnou pravdivostní hodnotu.
Byla-li hodnota $p = 1$, $\bar{p} = 0$.
Byla-li hodnota $p = 0$, $\bar{p} = 1$.
- 3) Každý výrok p je se svojí negací $\bar{p}$ kontradiktorický (protikladný).
- 4) Každý výrok lze negovat. Vznikne opět výrok.

p negované je $\bar{p}$.

$\bar{p}$ negované je $\bar{\bar{p}}$.

$\bar{\bar{p}}$ negované je $\bar{\bar{\bar{p}}}$ atd.

- 5) Výrok se sudým počtem negačních pruhů lze nahradit výrokem kladným

$\bar{\bar{p}} \approx p$, $\bar{\bar{\bar{p}}} \approx \bar{p}$ atd.

Výrok s lichým počtem negačních pruhů lze nahradit výrokem záporným.

$$\overline{\overline{p}} = p, \quad \overline{\overline{\overline{p}}} = \overline{p} \text{ atd.}$$

Transformace formulí

Formalizujme následující dva výroky a zkonstruujme vyhodnocovací matici.

/58.0/ „Jestliže, (jestliže nedostanu do úterka zprávu ($\bar{p}$), pak nepřijedu ($\bar{q}$)) pak budu telefonovat (r).

$(\bar{p} \supset \bar{q}) \supset r$, viz tab. 19, sl. 7,

/58.1/ „Není pravda, že dostanu zprávu nebo nepřijedu, nebo budu telefonovat.“,

$\overline{p \supset q} \supset r$, viz tab. 19, sl. 10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	p	$\bar{p}$	q	$\bar{q}$	r	$\bar{p} \supset \bar{q}$	$6 \rightarrow 5$	$p \supset q$	$\overline{p \supset q}$	$9 \vee r$	$7 \equiv 10$
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
3	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
4	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
5	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1
6	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
7	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
8	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
							/58.0/			/58.1/	

Tab. 19.

Oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu, jsou tedy ekvivalentní.

Existují tedy výroky (formule, funkce), které vyjadřují tentýž obsah jinými funktory. Říkáme, že jsou ekvivalentní.

Tuto skutečnost můžeme využít takto:

Každý výrok (formule, funkce) může být transformována na výrok ekvivalentní tvořený předem danými funktory.

Příklad. Máme za úkol transformovat výrok na výrok ekvivalentní, kde jsou pouze logické spojky "nebo" a negace.

/59/ „Tvrzení, že půjdu do školy (p), je neslučitelné s tím, že pojedu do Prahy (q).“

Formalizujeme na $p|q$.

Víme, že platí ekvivalence (viz tab. 12, sl. 15 $\approx$ sl. 2)

$$p|q \approx \overline{p \wedge q}.$$

$$\overline{p \wedge q} \approx \overline{p} \vee \overline{q}$$

dle zák. De Morgana

/59.1/ „Nepůjdu do školy nebo nepojedu do Prahy.“

q

Znalost transformací a jejich praktické využívání právě prokazuje obrovské možnosti moderní logiky.

Ověřování platnosti složených výroků, důkazy o shodnosti formálně různých výroků, konstrukce důkazů, rozvíjení axiomatických systémů, výpočty logických obvodů, zjišťování vhodnosti organizačních, technických, kybernetických struktur, konstrukce definičních rovností atd.

Způsoby transformace

Prvotní zásada transformací je, že

„nahradíme-li ve složeném výroku nějakou jeho součást ekvivalencí, pravdivostní hodnota tohoto výroku se nemění“.

- I. Nejjednodušší způsob transformace se nabízí tam, kde vidíme v tab. 12, že jedna polovina tabulky je negací poloviny druhé. Každá funkce odpovídající sloupci $1+n$ tabulky je ekvivalencí negace funkce ve sl. $16-n$ (n = celé číslo, pro které platí $0 \leq n \leq 15$).

Dle tohoto pravidla můžeme

funkci sl.1+0 nahradit negací funkce ve sl. 16 – 0,
funkci sl.1+1 nahradit negací funkce ve sl. 16 – 1,
funkci sl.1+6 nahradit negací funkce ve sl. 16 – 6
atd.

Platí tedy na příklad ekvivalence

$$\begin{aligned} p \text{ "F}_2\text{" } q &\equiv \overline{p \text{ "V}_2\text{" } q} \\ p \wedge q &\equiv \overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \\ p \not\equiv q &\equiv \overline{p \equiv q}, \text{ atd.} \end{aligned}$$

V národním jazyce to znamená, že tvrzení

/58.0/ „Koupím lístky a půjdu do kina.“

je shodné s

/58.1/ „Není pravda, že nelze současně koupit lístky a jít do kina.“

nebo v matematice, že

$$x \not\equiv y \equiv \overline{x = y}.$$

II. Dalším možným způsobem transformace je, že ekvivalenci k transformované formuli vytvoříme umístěním negačních pruhů nad argumenty nebo nad celou formulí.

Chceme-li nahradit konjunkci disjunkcí, užijeme ekvivalence

$$\begin{aligned} p \sqcap q &\equiv \overline{\overline{p} \sqcup \overline{q}}, \\ \overline{p \sqcap q} &\equiv \overline{\overline{p} \sqcup \overline{q}}, \end{aligned}$$

což jsou dva z velmi významných De Morganových zákonů; implikaci disjunkcí můžeme nahradit ekvivalentním výrazem

$$p \supset q \equiv \overline{p \sqcap \overline{q}},$$

a protože již víme, jak nahradit disjunkci konjunkcí užitím De Morganova zákona, můžeme pokračovat na

$$\bar{p} \sqcap q \approx \overline{p \sqcup \bar{q}} \text{ atd.}$$

Opět si můžeme zdůraznit význam těchto ekvivalencí v národním jazyce maticí.

Národní jazyk:

/59.0/ „Jestliže bude hezky, půjdu na koupaliště.“,

/59.1/ „Nebude hezky nebo půjdu na koupaliště.“,

/59.2/ „Není pravda, že bude hezky a nepůjdu na koupaliště.“.

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \sqcup q$	$\bar{p} \sqcap q$	$p \sqcap \bar{q}$	$\overline{p \sqcap \bar{q}}$
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1
				/59.0/	/59.1/		/59.2/

Tab. 20

Z tab. 20 vidíme, že všechna tři tvrzení jsou ekvivalentní, proto jsou ve všech případech nepravdivá jen tenkrát, je-li $p = 1$ a $q = 0$.

Jako pomůcka pro snadné řešení úloh na transformace si uveďme následující tabulku ekvivalencí.

$$\boxed{\bar{p} \sqcap q \approx \overline{p \sqcup \bar{q}} \approx \overline{p|q} \approx \bar{p} \sqcap \bar{q} \approx p \sqcap q}$$

TE

Čteme:

„Není pravda, že non – p nebo non – q .“ je ekvivalentní

„Není pravda, že jestliže p , pak non – q .“ je ekvivalentní

„Není pravda, že p je neslučitelné s q .“ je ekvivalentní

„Ani není pravda, že $\text{non} - p$, ani není pravda, že $\text{non} - q$.“ je ekvivalentní „ p a q “.

Protože ekvivalence je komutativní, můžeme v tabulce jednotlivé ekvivalence zaměňovat.

Např. $\overline{p \oplus \bar{q}} \approx p \oplus q$,
 $\bar{p} \oplus \bar{q} \approx \overline{p \oplus q}$ atd.

Z matematiky víme, že provedeme-li nějakou operaci s jednou stranou rovnice, musíme učinit totéž se stranou druhou.

U ekvivalencí, které mají význam tautologií, platí obdobná zásada při práci s negačními pruhy.

Příklad.

aa) $p \oplus q \approx \bar{p} \oplus q$,

negací p získáme ekvivalenci

ab) $p \oplus \bar{q} \approx \bar{p} \oplus \bar{q}$,

negací q získáme ekvivalenci

ac) $\bar{p} \oplus \bar{q} \approx \overline{p \oplus q} \approx p \oplus q$

ba) $(p \approx q) \approx (p \oplus q) \oplus (q \oplus p)$,

negací p získáme

bb) $(\bar{p} \approx q) \approx (\bar{p} \oplus q) \oplus (q \oplus \bar{p})$

Pro příklad bb) si uděláme důkaz tabulkou.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	p	$\bar{p}$	q	$p \equiv q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$5 \wedge 6$	$4 \equiv 7$	$\bar{p} \approx q$	$\bar{p} \oplus q$	$q \oplus \bar{p}$	$10 \wedge 11$	$9 \equiv 12$
1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1
2	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
3	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
4	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1
							ba)						bb)

Tab. 21

q

S tabulkou ekvivalencí pracujeme takto:

Máme-li za úkol transformovat nějaký výrok s funktorem, který je obsažený v TE na jiný funktor, který je také obsažený v TE, pak

- vypíšeme si ekvivalenci obsahující na levé straně funktor, který odstraňujeme, a na pravé straně funktor, na který přecházíme,
- doplněním negačních pruhů docílíme tvaru formule, kterou transformujeme,
- stejně negační pruhy umístíme na druhé straně ekvivalence,
- odstraníme dvojí negaci.

Příklad. 1. Máme za úkol transformovat na ekvivalentní formuli s Peircovým funktorem

$$\overline{p \multimap q}.$$

Dle pokynu a) vypíšeme z TE

$$1.0 \quad p \multimap q \approx \overline{\overline{p} \sqcap \overline{q}} \quad \text{dle b) a c)}$$

$$1.1 \quad \overline{\overline{p} \multimap \overline{q}} \approx \overline{\overline{\overline{p} \sqcap \overline{q}}} \quad \text{dle d)}$$

$$1.2 \quad \overline{\overline{p} \multimap \overline{q}} \approx \overline{\overline{p} \sqcap \overline{q}}$$

$$1.3 \quad \overline{\overline{p} \multimap \overline{q}} \approx [p \sqcap (q \sqcap q)] \sqcap [p \sqcap (q \sqcap q)]$$

2. Máme za úkol transformovat formuli

$$[(x \odot y) \multimap (y < 2)] \multimap (x \odot 1)$$

tak, aby obsahovala pouze funktory disjunkce.

Nejprve odstraníme funktor implikace.

$$2.0 \quad p \multimap \overline{q} \approx \overline{\overline{p} \sqcap q} \quad \text{dle pokynu a)}$$

$$2.1 \quad \overline{\overline{p \rightarrow q}} \approx \overline{\overline{p} \rightarrow q}$$

dle pokynu b)

$$2.2 \quad p \rightarrow q \approx \overline{\overline{p} \rightarrow q}$$

dle pokynu c).

do pravé části

ekvivalence

substituujeme za

$p \quad [(x \rightarrow y) \rightarrow (y < 2)]$ a

za $q \quad (x \rightarrow 1)$

$$2.3 \quad \overline{[(x \rightarrow y) \rightarrow (y < 2)]} \rightarrow (x \rightarrow 1)$$

dle De Morg. substitucí

$p \mid (x \rightarrow y), q \mid (y < 2)$

$$2.4 \quad \overline{(x \rightarrow y)} \rightarrow \overline{(y < 2)} \rightarrow (x \rightarrow 1)$$

protože

$$\overline{x \rightarrow y} = x > y$$

$$\overline{y < 2} = y \rightarrow 2$$

můžeme zapsat bez
negačních pruhů:

$$2.5 \quad (x > y) \rightarrow (y \rightarrow 2) \rightarrow (x \rightarrow 1),$$

což je výrok
ekvivalentní danému.

q

III. Zatím jsme v transformacích opomíjeli funktory ekvivalence a antivalence. I ty je možno transformovat na již užívané funktory $\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow$ následujícími ekvivalencemi (tautologiemi):

$$(p \approx q) \approx (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p),$$

$$(p \approx q) \approx (p \rightarrow q) \rightarrow (\bar{p} \rightarrow \bar{q}),$$

$$(p \approx q) \approx (p \rightarrow \bar{q}) \rightarrow (\bar{p} \rightarrow q),$$

$$\overline{p \approx q} \approx p \approx q,$$

$$(p \approx q) \approx (p \rightarrow \bar{q}) \rightarrow (\bar{p} \rightarrow \bar{q}),$$

$$(p \approx q) \approx (p \sqcap q) \sqcap (\bar{p} \sqcap \bar{q}).$$

Shefferův a Peircův (Lukasiewiczův) funktor

Zvláštní pozornost je nutno věnovat těmto dvěma funktorům. Oba mají jednu společnou vlastnost: jsou schopny vyjádřit negaci a nahradit tak při transformacích i funktor negace.

Protože již víme, že lze jakékoliv funktory transformovat a vyjádřit funktorem Shefferovým či Peircovým a negacemi a protože těmito dvěma funktory lze nahradit i negace, můžeme učinit závěr, že

jakýkoliv výrok (formuli) lze vyjádřit jediným – Shefferovým nebo Peircovým funktorem.

V tabulce máme jednoargumentový funktor negace a funktory Shefferův a Peircův. Zopakujme si:

Negace: změni pravdivostní hodnotu výroku na opačnou.

Shefferův funktor: výrok je pravdivý, je-li alespoň jeden argument nepravdivý.

Peircův funktor: výrok je pravdivý, jsou-li oba argumenty nepravdivé.

	1	2	3	4
	p	$\bar{p}$	$p p$	$p \bar{p}$
1	0	1	1	1
2	1	0	0	0

Tab. 22

Je-li výrok pravdivý, jeho negace je stejně jako Shefferova nebo Peircova funkce nepravdivá a naopak.

Tyto dva funktory tedy udílejí výroku právě tak opačnou hodnotu, jako negace.

Platí tedy ekvivalence (tautologie):

$$\bar{p} \approx p | p$$

$$Z\ 11 \quad \bar{p} \approx p \sqcap p$$

Příklad. Máme odstranit negaci formule $\overline{p \sqcap q}$.

Užitím tautologie $\bar{p} \approx p | p$ a substitucí $p | p \sqcap q$

$$3.0 \quad \overline{p \sqcap q} \approx (p \sqcap q) | (p \sqcap q) \quad \text{dle Z 10}$$

Dále máme za úkol transformovat konjunkce na Shefferovu funkci.

$$3.1 \quad (p \sqcap q) | (p \sqcap q) \approx \overline{p | q} \quad \text{(dle TE)}$$

$$3.2 \quad [(p | q) | (p | q)] | [(p | q) | (p | q)] \quad \text{dle Z 10,}$$

což je ekvivalentní danému výroku 3.0.

	1	2	3	4	5	6	7	8
	p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \sqcap q}$	$p q$	$5 5$	$6 6$	$4 \equiv 7$
1	0	0	0	1	1	0	1	1
2	0	1	0	1	1	0	1	1
3	1	0	0	1	1	0	1	1
4	1	1	1	0	0	1	0	1
				3.0			3.2	

Tab. 23

Stejným způsobem postupujeme při transformaci na Peircův funktor. Transformace na jediný Shefferův nebo Peircův funktor mají význam nejen teoretický, ale i praktický.

Tabulka základních ekvivalencí dvouargumentových funktorů dvouhodnotové logiky

	1	2	3	4	5	6	7	8
	$p \quad q$	$p \quad \bar{q}$	$\bar{p} \quad q$	$\bar{p} \quad \bar{q}$	$\overline{p \quad q}$	$\overline{p \quad \bar{q}}$	$\overline{\bar{p} \quad q}$	$\overline{\bar{p} \quad \bar{q}}$
I	$p \sqcap q$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$ $	$\downarrow$	$ $	$\nmid$	$\wedge$
II	$p \sqcup q$	$ $	$\vee$	$\leftarrow$	$\nmid$	$\wedge$	$\downarrow$	$\nmid$
III	$p q$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\vee$	$\wedge$	$\nmid$	$\nmid$	$\downarrow$

	1	2	3	4	5	6	7	8
	$p \quad q$	$p \quad \bar{q}$	$\bar{p} \quad q$	$\bar{p} \quad \bar{q}$	$\overline{p \quad q}$	$\overline{p \quad \bar{q}}$	$\overline{\bar{p} \quad q}$	$\overline{\bar{p} \quad \bar{q}}$
IV	$p \sqcap q$	$\mathcal{I}$	$\nexists$	$\wedge$	$\vee$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$ $
V	$p \mathcal{I} q$	$\nexists$	$\mathcal{I}$	$\downarrow$	$ $	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\vee$
VI	$p \mathcal{I} q$	$\vee$	$ $	$\rightarrow$	$\mathcal{I}$	$\downarrow$	$\wedge$	$\nexists$
VII	$p \mathcal{I} q$	$\downarrow$	$\wedge$	$\nexists$	$\leftarrow$	$\vee$	$ $	$\rightarrow$
VIII	$p \nexists q$	$\wedge$	$\downarrow$	$\mathcal{I}$	$\rightarrow$	$ $	$\vee$	$\leftarrow$

V řádcích I až VIII jsou uvedeny jednotlivé funktoři a ve sloupcích všechny ekvivalence, kam se dosadí k funktoři odpovídající argumenty p, q s negačními pruhy, které tomuto sloupci odpovídají.

Příklad. Řádek I, $p \mathcal{I} q$, ekvivalentní Shefferova funkce je ve sl. 4, tzn. negační pruhy nad p a q . Tedy: $(p \mathcal{I} q) \approx (\bar{p} | \bar{q})$. Obrácená implikace (sl. 2) $(p \mathcal{I} \bar{q}) \approx (\bar{\bar{p} \nexists q})$ – viz sl. 7, negační pruh nad p a nad celou formulí atd.

Značení funktořů:

$\vee$	disjunkce	$\rightarrow$	implikace
$\wedge$	konjunkce	$\nexists$	negovaná implikace
$ $	Shefferova funkce	$\leftarrow$	obrácená implikace
$\downarrow$	Peircova funkce	$\mathcal{I}$	negovaná obrácená implikace

Některé obecné zásady využívání zákonů (tautologií) a kontradikcí s komentářem

(Seznam zákonů viz str. a příl. I)

1. Zákon (tautologie) Z má ve výsledném sloupci tabulky vždy pravdivostní hodnotu "1". To nám umožňuje sestavovat libovolný počet ekvivalencí

$$Z_1 \approx Z_2 \approx Z_3 \approx \star \approx Z_n \approx 1$$

(Znak "1" je konstanta pro vždy pravdivý výrok, nikoli číslice.)

2. Vyžaduje-li to praktická situace, můžeme ve složeném výroku, jehož součástí je nějaká tautologie, tuto nahradit konstantou 1. Výsledná formule je ekvivalentní formuli původní.

Příklad. a) Dokažte, že formule aa) je ekvivalentní formuli ab):

$$\text{aa)} \quad [(p \supset q) \supset (\bar{q} \supset \bar{p})] \supset [p \supset (p \supset q)]$$

Antecedentem této implikace je zákon kontrapozice. Můžeme ho tedy nahradit konstantou 1.

$$\text{ab)} \quad 1 \supset [p \supset (p \supset q)]$$

Důkaz maticí:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	"1"	$p \rightarrow q$	$\bar{q} \supset \bar{p}$	$6 \rightarrow 7$	$p \supset (p \supset q)$	$p \vee 9$	$8 \rightarrow 10$	$5 \rightarrow 10$	$11 \equiv 12$
1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
2	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
3	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	"1"	$p \rightarrow q$	$\bar{q} \Leftrightarrow \bar{p}$	$6 \rightarrow 7$	$p \Leftrightarrow q$	$p \vee q$	$8 \rightarrow 10$	$5 \rightarrow 10$	$11 \equiv 12$
4	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
											aa)	ab)	

Tab. 24

q

3. Analogické operace můžeme provádět s výroky, jejichž součástí je kontradikce – konstanta 0 (resp. N).

Zavedení znaku "1" a "0" nám umožňuje pracovat s tautologiemi (viz „Přehled tautologií“).

Využívání těchto tautologií je předpokladem pro zavedení další metody důkazu, zda je daná formule tautologií (vždy pravdivá), kontradikcí (vždy nepravdivá) či splnitelná (určí za jakých možných hodnot argumentů je splněna).

Příklad. b) Ukažte, že formule b) je tautologie:

$$\bar{p} \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q).$$

ba) $\bar{p} \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

odstranění implikace dle TE, transformace na disjunkci

bb) $p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

tatáž operace uvnitř kulaté závorky

bc) $p \Leftrightarrow (\bar{p} \Leftrightarrow q)$

upravíme dle Z 25

bd) $(p \Leftrightarrow \bar{p}) \Leftrightarrow q$

upravíme dle Z 56

be) $1 \Leftrightarrow q$

substitucí $p|q$

bf) 1

Jde o tautologii.

q

Příklad. c) Dokažte, že formule c) je kontradikce:

$$\overline{(p \vee q)} \equiv p.$$

$$\text{ca) } \overline{(p \vee q)} \equiv p$$

transformací implikace na konjunkci.

Z TE vypíšeme $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$.

Úpravou negací $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$ subst.

$p|(p \vee q), q|p$

$$\text{cb) } (p \vee q) \vee \overline{q}$$

upravíme dle Z 24

$$\text{cc) } p \vee (q \vee \overline{q})$$

dále dle Z 55

$$\text{cd) } p \vee 0$$

a konečně dle Z 53

$$0$$

Jde o kontradikci.

q

Příklad. **Příklad. d)** Mějme složený výrok:

/37/ „Půjdu-li do divadla nebo do kina, pak se ani nebudu učit ani nepůjdu na trénink.“.

Jestliže výrok formalizujeme, získáme formuli

$$\text{da) } (p \vee q) \supset (r \wedge s)$$

transformace Peircova funktoru na konjunkci dle TE

$$\text{db) } (p \vee q) \supset (\overline{r} \vee \overline{s})$$

transformace implikace na disjunkci dle TE

$$\text{dc) } \overline{(p \vee q)} \vee (\overline{r} \vee \overline{s})$$

dle De Morg. zákona

$$\text{dd) } (\overline{p} \vee \overline{q}) \vee (\overline{r} \vee \overline{s}), \text{ resp.}$$

$$\overline{p} \vee \overline{q} \vee \overline{r} \vee \overline{s}$$

jde o splnitelnou formuli.

Výroku /37/ je ekvivalentní výrok

/38/ „Nepůjdu do divadla a do kina nebo se nebudu učit a nepůjdu na trénink.“.

q

Poznámka. Jako v matematice neuvádíme operační znaménko pro násobení (místo $x \cdot y$ píšeme xy), tak i my v logice budeme někdy této praxe užívat a psát místo $p \wedge (q \vee r)$ pouze $p(q \vee r)$, místo $p \wedge q \wedge r$ napíšeme pqr apod.

Logických zákonů (tautologií) může být nekonečně mnoho. Jejich množinu můžeme stále rozmnožovat substitucemi, transformacemi apod.

Několik příkladů doprovázených podrobným zdůvodňováním každého kroku si znázorníme.

Naším východiskem bude zákon totožnosti $Z_1 : p \dashv\dashv p$.

- | | | |
|-----|--|---|
| ea) | $p \dashv\dashv p$ | substitucí $p p \dashv\dashv q$ |
| eb) | $(p \dashv\dashv q) \dashv\dashv (p \dashv\dashv q)$ | v konsekventu transformujeme na disjunkci dle TE |
| ec) | $(p \dashv\dashv q) \dashv\dashv (\bar{p} \vee q)$ | dle Z 21 upravíme konsekvent |
| ed) | $(p \dashv\dashv q) \dashv\dashv (q \vee \bar{p})$ | disjunkci v konsekventu transformujeme na implikaci |
| ee) | $(p \dashv\dashv q) \dashv\dashv (\bar{q} \dashv\dashv \bar{p})$ | <i>zákon kontrapozice</i> (transpozice)
Z 16 |

Dalším příkladem bude $Z_{13} : p \dashv\dashv (p \vee q)$

- | | | |
|-----|---|----------------------------------|
| fa) | $p \dashv\dashv (p \vee q)$ | dle TE |
| fb) | $p \dashv\dashv (\bar{p} \dashv\dashv q)$ | substitucí $p \bar{p}$ |
| fc) | $\bar{p} \dashv\dashv (\bar{p} \dashv\dashv q)$ | dle Z 5 |
| fd) | $\bar{p} \dashv\dashv (p \dashv\dashv q)$ | <i>zákon Dunse Scotta</i> (Z 14) |

Víme, že implikace není komutativní. Proto potřebujeme-li z jakéhokoliv praktického důvodu zaměnit antecedent a konsekvent,

provedeme nejprve transformaci na nějaký funktor, který komutativní je ($\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$).

Příklad. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$ Z 33

ga) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$ dle TE

gb) $\overline{p \rightarrow q} \rightarrow [\overline{(q \rightarrow r)} \rightarrow \overline{(p \rightarrow r)}]$ dle Z 25

gc) $(\overline{p \rightarrow q} \rightarrow \overline{q \rightarrow r}) \rightarrow \overline{(p \rightarrow r)}$ dle De Morgana

gd) $\overline{(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)}$ transformací disjunkce na implikaci

ge) $[(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ Z 32 II. varianta

Je zřejmé, že můžeme odvodit i další varianty tohoto velmi významného zákona.

Dle zákona sylogismu vychází např. úsudek:

1.Z řemeslné úrovně archeologického nálezu hliněné nádoby usuzujeme na zručnost výrobce.

2.Ze zručnosti usuzujeme na úroveň předávání zkušeností, tedy dorozumívání.

3.Z úrovně dorozumívání usuzujeme na úroveň schopnosti komunikace (jazyku).

4.Z úrovně jazyka usuzujeme na úroveň myšlení.

Závěr: Z nálezu hliněné nádoby usuzujeme na úroveň myšlení tehdejšího člověka.

Základní tři zákony výrokové logiky definoval již Aristoteles (384-322 př. n. l.). V podstatě se však jedná o variace zákona totožnosti.

Z 1 $p \rightarrow p$ zákon totožnosti vyjadřuje fakt, že každá věc je totožná sama se sebou.

Transformací na disjunkci získáme

$$Z\ 2 \quad \bar{p} \vee p$$

zákon vyloučeného třetího. Platí $\bar{p}$ nebo p . Třetí možnost je vyloučena.

$$Z\ 3 \quad \overline{p \wedge \bar{p}}$$

zákon sporu. Dva výroky (formule, funkce, tvrzení) opačné hodnoty neplatí současně.

Tyto zákony mají tak obrovský význam, že přesahuje rámec výrokové logiky. Někteří filosofové je pokládají za *apriorní* (předzkušnostní), vrozené, na rozdíl od *aposteriorních* (získaných zkušenostmi). Bližší k této problematice lze nalézt ve filosofii a jejích dějinách.

$$Z\ 4, Z\ 5 \quad p \equiv \bar{\bar{p}}, p \approx \bar{\bar{p}}$$

Zákony dvojnásobné negace umožňují nahradit výrok se sudým počtem negací výrokem kladným.

$$Z\ 14 \quad \bar{p} \equiv (p \rightarrow q)$$

Zákon Dunse Scotta vyjadřuje paradox implikace „nepravdivý výrok implikuje každý výrok“. Implikaci charakterizuje též

$$Z\ 18 \quad [(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

zákon modus ponens

$$Z\ 19 \quad [(p \rightarrow q) \wedge \bar{q}] \rightarrow \bar{p}$$

zákon modus tollens

Úsudky modus ponens a tollens jsou často v hovorové řeči užívány.

Modus ponens:

„Má-li student výborný prospěch, získá stipendium.
Novák má výborný prospěch.
Novák získá stipendium.“

Modus tollens:

„Má-li student výborný prospěch, získá stipendium.
 Novák nezískal stipendium.
 Novák nemá výborný prospěch.“

- Z 16 $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Leftrightarrow \bar{p})$ *zákon kontrapozice.*
- Z 20, 21, 22, 23 *zákony komutativnosti*
 konjunkce, disjunkce, ekvivalence,
 antivalence.
- Z 24, 25, 26, 27 *zákony asociativnosti pro*
 konjunkci, disjunkci, ekvivalenci a
 antivalenci (ostrou disjunkci).

U zákonů asociativnosti je nutno podat podrobnější výklad. Logické spojky konjunkce, disjunkce, ekvivalence a jejich negace, tzn. Shefferova funkce, Peircova funkce a antivalence se jeví jako bezproblémové. Není tomu tak! Zdánlivá samozřejmost působí logické chyby nejen v hovorovém jazyce, ale i v odborné literatuře. Objeví-li se v učebnici logiky tvrzení, že „můžeme tedy obdobně jako při sčítání a násobení i u konjunkce, disjunkce a ekvivalence vynechat závorky a psát, např. tříčlennou konjunkci bez závorek“, umožňuje tato formulace interpretaci, že i tříčlennou ekvivalenci lze psát bez závorek. Potom by muselo platit, že

$$[(p \approx q) \approx r] \approx p \approx q \approx r$$

Pokud si čtenář „upraví“ definici ekvivalence tak, že „ekvivalence je pravdivá, jsou-li hodnoty všech argumentů shodné a v ostatních případech je nepravdivá“, nejde o dvouargumentový funktor ekvivalence. Matice pro tuto ekvivalenci by vypadala takto:

	1	2	3	4	5	6	7
	p	q	r	$(p \equiv q)$	$(p \equiv q) \equiv r$	$p \equiv q \equiv r$	$5 \equiv 6$
1	0	0	0	1	0	1	0
2	0	0	1	1	1	0	0
3	0	1	0	0	1	0	0
4	0	1	1	0	0	0	1
5	1	0	0	0	1	0	0
6	1	0	1	0	0	0	1
7	1	1	0	1	0	0	1

8	1	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

Tab. 25

Sl. 6 je vyhodnocen dle „upravené“ definice. Ve sl. 7 je důkaz, že nejde o ekvivalenci a nelze takto postupovat. Je nutno zdůraznit, že takovéto chápání asociativnosti u ekvivalence a antivalence je nepřípustné. Pokud je již zápis bez závorek proveden, je nutno ekvivalenci řešit tak, jako by závorky umístěny byly. Vyžaduje to charakter funktorů *dvouargumentových*. K chybě dochází analogií s konjunkcí a disjunkcí, kde taková úvaha je možná a nevede k logické chybě.

Vidíme to na následující matici, kde vyhodnotíme dvě ekvivalence tímto způsobem sestrojené.

$$1. [(p \text{ } \text{ } q) \text{ } \text{ } r] \text{ } \text{ } (p \text{ } \text{ } q \text{ } \text{ } r)$$

$$2. [(p \text{ } \text{ } q) \text{ } \text{ } r] \text{ } \text{ } (p \text{ } \text{ } q \text{ } \text{ } r)$$

Ad 1: V případě konjunkce je „upravená definice“:

„Konjunkce je pravdivá, jsou-li *všechny* argumenty pravdivé.“

Ad 2: V případě ekvivalence je „upravená definice“:

„ekvivalence je pravdivá, jsou-li *všechny* argumenty stejné pravdivostní hodnoty.“

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge q \wedge r$	$5 \equiv 6$	$p \equiv q$	$(p \equiv q) \equiv r$	$p \text{ "}" q \text{ "}" r$	$9 \equiv 10$
1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
2	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
3	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
4	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
5	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
6	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
7	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
							1.				2.

Tab. 26